# 15.1 含参变量的常义积分

2024年6月11日 星期二 10:11

设 $f: [a,b]\times[c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ 连续

则 $\forall y\in[c,d]$，$f(x,y)$ 作为 $x$ 的函数在$[a,b]$上连续，从而可积

于是可定义 $I(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$，$y\in[c,d]$

类似地，可定义 $J(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy$ $x\in[a,b]$

问：$I(y)$ 是否在$[c,d]$上连续？

任取 $y\in[c,d]$，任取$\Delta y$，使 $y+\Delta y\in[c,d]$ 且 $|\Delta y|<\delta$，就有

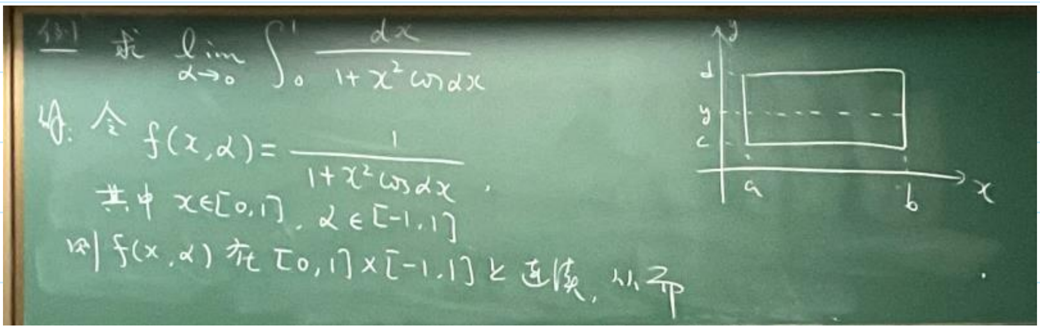
$$|I(y+\Delta y)-I(y)| = \left|\int_a^b (f(x,y+\Delta y)-f(x))\,dx\right|$$
$$\le \int_a^b |f(x,y+\Delta y)-f(x)|\,dx$$
$$\le \int_a^b \varepsilon\,dx = \varepsilon(b-a)$$

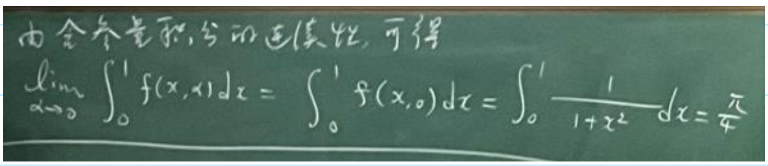
从而 在点$y$处连续，由$y$的任意性，$I$ 在$[c,d]$上连续

由$f$在闭矩形$E$上连续，从而一致连续，所以 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$

$\forall(x',y')\ (x'',y'')\in E$，只要 $\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2} < \delta$ 就有 $|f(x',y')-f(x'',y'')|<\delta$

性质1：$I(y)$ 在$[c,d]$上连续，同理 $J(x)$ 在$[a,b]$连续




$$I'(y) = \lim_{\Delta y\to0}\frac{I(y+\Delta y)-I(y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to0}\int_a^b \frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}\,dx$$

$\underline{\underline{\text{L-定理}}}$ $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\int_a^b f_y(x, y+\theta(x,y,\Delta y)\Delta y)\,dx \quad \theta\in(0,1)$

$\underline{\underline{\text{偏导数连续}}}$ $\int_a^b f_y(x,y)\,dx$

性质2：假设 $f(x,y)$ 关于 $y$ 的偏导数 $f_y(x,y)$ 在 $E=[a,b]\times[c,d]$ 上连续，则 $I'(y)=\int_a^b f_y(x,y)\,dx$

---

$$F(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx \quad y\in[c,d]$$

此外，假设 $f: E=[a,b]\times[c,d]\longrightarrow\mathbb{R}$ 连续

设 $\alpha(y)$ 与 $\beta(y)$ 在 $[c,d]$ 上连续，且 $\forall y\in[c,d]$，有 $\alpha(y),\beta(y)\in[a,b]$

问：$F(y)$ 是否在 $[c,d]$ 上连续？ 令 $x=\alpha(y)+(\beta(y)-\alpha(y))t \quad t\in[0,1]$

$$F(y)=\int_0^1 \underbrace{f(\alpha(y)+(\beta(y)-\alpha(y))t, y)(\beta(y)-\alpha(y))}_{g(t,y)}\,dt$$

又由复合函数的连续性，可得 $g(t,y)$ 在 $[0,1]\times[c,d]$ 上连续

从而由性质1，$F(y)$ 在 $[c,d]$ 上连续

问：$F'(y)=?$

定义：$I(u,v,y)=\int_u^v f(x,y)\,dx$ ，$(u,v,y)\in[a,b]\times[a,b]\times[c,d]$

则 $F(y)=I(\alpha(y),\beta(y),y)$

所以 $I(u,v,y)$ 与 $\alpha(y),\beta(y)$ 都可微的情形下

（即：设 $\alpha(y),\beta(y)$ 在 $[c,d]$ 上可导，且 $f_y(x,y)$ 在 $E$ 上连续

并且 $\frac{\partial I}{\partial u}=-f(u,y)$ $\quad \frac{\partial I}{\partial v}=f(v,y)$ $\quad \frac{\partial I}{\partial y}\overset{\text{性质2}}{=\!=}\int_u^v f_y(x,y)\,dx$

都在 $[a,b]\times[a,b]\times[c,d]$ 上连续，

于是 $I(u,v,y)$ 可微，又 $u=\alpha(y)$ 与 $v=\beta(y)$ 在 $[c,d]$ 上可导）

☆ $$F'(y)=\frac{\partial I}{\partial u}\Big|_{u=\alpha(y)}\cdot\alpha'(y)+\frac{\partial I}{\partial v}\Big|_{v=\beta(y)}\cdot\beta'(y)+\frac{\partial I}{\partial y}$$
$$=-f(\alpha(y),y)\cdot\alpha'(y)+f(\beta(y),y)\cdot\beta'(y)+\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f_y(x,y)\,dx$$